Devoir maison n$^{\text{o}}$ 11 - Correction

Exercice 1 (*inspiré d'un oral de CCINP 2022*)**.**

Soit M la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t, \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t. \end{cases}$

Q1. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. On précisera le théorème utilisé. Montrer de plus que $\alpha \in [\frac{\pi}{2}\,;\pi]$.

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'après le théorème de la bijection, la fonction cos réalise donc une bijection de $[0\,;\pi]$ dans $[-1\,;1]$. En particulier, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [0\,;\pi] \text{ tel que } \cos\alpha = -\frac{1}{4}}$.

Enfin, comme $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 > -\frac{1}{4}$, on a $\boxed{\text{nécessairement } \alpha \in [\frac{\pi}{2}\,;\pi]}$.

Q2. Soit g la fonction définie par $g(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t)$.
Déterminer les variations de g sur $[0\,;\pi]$.

La fonction g est dérivable sur $[0\,;\pi]$ comme somme de fonctions usuelles qui le sont. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(-\sin t)\cos t - 2\cos t \sin t - \sin t \\ &= (\sin t)(-4\cos t - 1) \end{aligned}$$

Sur $[0\,;\pi]$, on a d'une part $\sin t = 0 \iff t = 0$ ou π et d'autre part, en utilisant la question précédente, $-4\cos t - 1 = 0 \iff \cos t = -\frac{1}{4} \iff t = \alpha$. Ainsi

t	0		α		π
$\sin t$	0	$+$		$+$	0
$-4\cos t - 1$		$-$	0	$+$	
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
g	2	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0

Q3. Justifier que

$$\forall t \in [0\,;\tfrac{\pi}{3}[,\ g(t) > 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]\tfrac{\pi}{3}\,;\pi[,\ g(t) < 0.$$

Remarquons que $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$. Le tableau de variations précédent devient alors :

t	0	$\frac{\pi}{3}$	α		π
g	2 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0

On obtient ainsi le signe de g : $\boxed{\forall t \in [0\,;\frac{\pi}{3}[,\ g(t) > 0 \text{ et } \forall t \in]\frac{\pi}{3}\,;\pi[,\ g(t) < 0}$.

Q4. Expliquer pourquoi on peut réduire l'étude de M à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Les fonctions x et y étant toutes deux 2π-périodiques, on peut réduire l'étude à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$. De plus, comme la fonction x est paire et la fonction y est impaire, on peut encore réduire l'étude à $[0\,;\pi]$ et on complètera le tracé obtenu sur cet intervalle grâce à une symétrie selon l'axe des abscisses.

Q5. Dresser le tableau de variations commun de x et y sur $[0\,;\pi]$.

La fonction x est dérivables sur $[0\,;\pi]$ comme produit de fonctions qui le sont. Pour tout $t \in [0\,;\pi]$,

$$x'(t) = -\sin(t)\cos(t) + (1+\cos t)(-\sin t) = \sin(t) \times (-1 - 2\cos t).$$

En particulier sur $[0\,;\pi]$,

$$x'(t) = 0 \iff \sin t = 0 \text{ ou } -1 - 2\cos t = 0 \iff t = 0 \text{ ou } \pi \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}.$$

De plus, comme $\sin t \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$, $x'(t)$ est du signe de $-1 - 2\cos t$.
De même, y est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et on a pour tout $t \in [0\,;\pi]$,

$$y'(t) = -\sin(t)\sin(t) + (1+\cos t)\cos t = g(t).$$

Ainsi grâce à **Q3** on obtient

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Q6. Calculer $M'(\pi)$. Quel est le nom du point $M(\pi)$?

D'après les calculs effectués dans la question précédente, on a déjà $\boxed{M'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ce qui signifie que $\boxed{M(\pi) \text{ est un point stationnaire}}$.

Q7. Calculer $M''(\pi)$ et $M^{(3)}(\pi)$ puis en déduire la nature de ce point.

Les fonctions x et y sont trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions qui le sont. Les dérivées premières ont déjà été déterminées en **Q5**. D'abord, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} x''(t) &= (\cos t)(-1 - 2\cos t) + (\sin t)(2\sin t) = 2\sin^2(t) - 2\cos^2(t) - \cos(t) \\ y''(t) &= g'(t) \overset{\textbf{Q2}}{=} (\sin t)(-4\cos t - 1). \end{aligned}$$

En particulier, on obtient $\boxed{M''(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, ce vecteur dirigeant la tangente au point $M(\pi)$, celle-ci est donc horizontale.

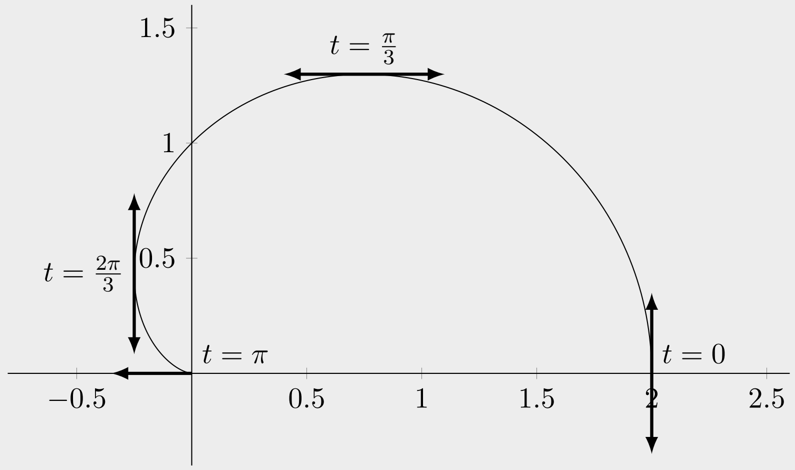
Ensuite, on dérive de nouveau et on obtient pour tout réel t,

$$x^{(3)}(t) = 4\cos t \sin t + 4 \sin t \cos t + \sin t = (\sin t)(8\cos t + 1)$$
$$y^{(3)}(t) = g''(t) = (\cos t)(-4\cos t - 1) + (\sin t)(4 \sin t) = 4\sin^2(t) - 4\cos^2(t) - \cos t$$

et en particulier $\boxed{M^{(3)}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}}$, vecteur non colinéaire à $M''(\pi)$. Ainsi, avec les notations usuelles, on a $p = 2$ et $q = 3$, *i.e.* $\boxed{M(\pi) \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$.

Q8. Tracer M en précisant les tangentes pour $t = 0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π.

D'après le tableau de variations obtenu en **Q5**, il y a des tangentes verticales pour $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{3}$ et une tangente horizontale pour $t = \frac{\pi}{3}$. De plus, d'après la question précédente, il y a une tangente horizontale pour $t = \pi$. Ainsi, d'après ces tangentes et le tableau de variations de x et y, on peut tracer la moitié supérieure :



Enfin on complète par symétrie selon l'axe des abscisses comme vu en **Q4** :